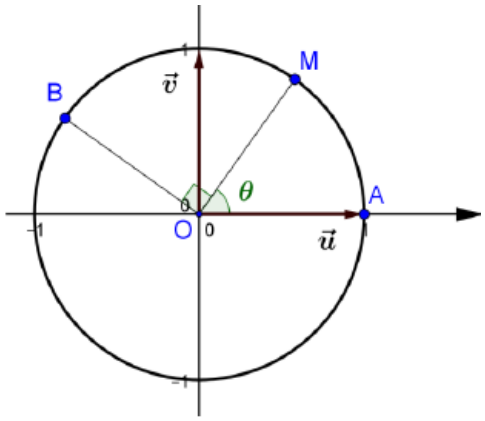
EXERCICE N°1 : 4 points 15 '

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.



Dans la figure ci-contre :

- $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1 et A le point de $\mathscr{C}$ d'affixe 1.
- M et B deux points de $\mathscr{C}$ tels que $(\vec{u},\overrightarrow{OM})\equiv\theta[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ où $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1°) On note z et b les affixes respectifs des points M et B.

a) Ecrire z et b sous forme exponentielle puis vérifier que $b=iz$.

b) Soit C le point d'affixe $-z^2$. On note A' le symétrique de A par rapport à la droite (OM). Montrer que A' et C sont symétriques par rapport à O. Placer alors le point C.

2°) Soit H le point d'affixe h avec $h=1+iz-z^2$.

a) Soit N le point d'affixe n avec $n=1+iz$. Construire le point N puis déduire une construction du point H.

b) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{AH})}{Aff(\overrightarrow{CB})}=\frac{Aff(\overrightarrow{CH})}{Aff(\overrightarrow{BA})}=\frac{1+iz}{1-iz}$.

c) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE N°2 : 5 points 20 '

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

A tout point M d'affixe $z\neq 0$, on lui associe le nombre complexe z' tel que $z'=i+\frac{2}{z}$.

1°) On suppose que $z=x+iy$ tel que $x,y\in IR$ et $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Vérifier que $z'=\frac{2x}{x^2+y^2}+i\left(1-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est réel.

2°) On suppose que $z=2e^{i\theta}$, $\theta\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que : $z'=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$.

b) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ.

c) **Application** : on pose $z=1+i\sqrt{3}$.

Calculer $|z'|$ .En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°3 : 6 points 25 '

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2°) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0,2\pi[$.

On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$

a) Montrer, pour tout $\alpha \in IR$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2i\sin\alpha e^{i\alpha}$.

b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$.

c) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3°) a) En utilisant **2°) c)** montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b) En utilisant **2°) c).**, montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

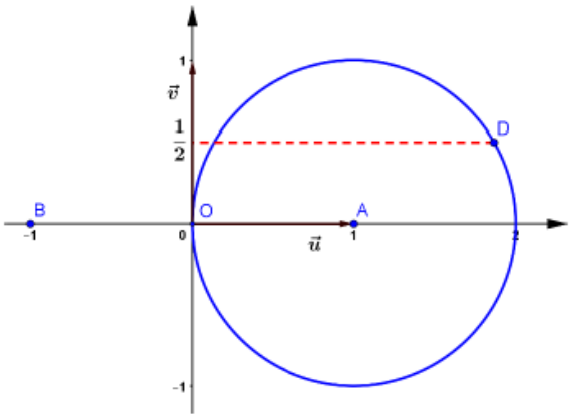
EXERCICE N°4 : 5 points 20 '

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- 1°) A l'aide de la figure :

a) Donner z_A et z_B les affixes respectifs de A et B

b) Déterminer $|z_D - 1|$ puis la forme algébrique de z_D (l'affixe du point D)



2°) On admet que : $z_D = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Calculer $|z_D|$.

b) Pour $\theta \in [0,\pi[$, Ecrire $e^{i\theta}+1$ sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

II- A tout point $M(z), z \in \mathbb{C}^*$, on associe le point $M'(z)$ tel que $z' = -\frac{1}{\overline{z}}$.

1°) a) Déterminer une relation entre $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

b) En déduire que les points O, M, M' sont alignés.

2°) Montrer que $\overline{(z'+1)} = \frac{1}{z}(z-1)$.

3°) On suppose que : $M \in \zeta \setminus \{O\}$.

a) Montrer que $|z'+1| = |z'|$.

b) En déduire que le point M' appartient à un droite que l'on déterminera.

4°) En déduire de ce qui précède une construction géométrique du point D' d'affixe $z_{D'} = \frac{-1}{\overline{z_D}}$.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°5 : 3 points 10 '

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(i)$.

A tout point M d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$. Soit la droite D : $y = 1$

1°) a) Déterminer la position de M' lorsque M est un point de la droite D privé de B.

b) Montrer que si $z = 1 + i - e^{i\theta}$ alors $z' = -e^{i\theta}$.

2°) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

3°) a) Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $z'\,\overline{z'} = 1$ .Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout $M \notin D$ on a : $(AM') \perp (BM)$.

c) Construire le point M' dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, pour un point donné M.

EXERCICE N°6 : 3 points 10 '

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, M et M' d'affixes respectives $a = 1+i$; $b = 1-i$, z et z' tel que : $z' = 2 - \dfrac{2}{z}$ avec $z \neq 0$.

1°) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : (E) $z' = z$; donner les solutions sous forme exponentielle.

2°) a) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $a^{8n} + b^{8n} = 2^{4n+1}$.

3°) On pose $z = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]0;\pi]$.

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque $\alpha \in]0;\pi]$.

b) Montrer que $z' = 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\, e^{-i\left(\frac{\alpha-\pi}{2}\right)}$.

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, A et M' sont alignés.

4°) a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\,;a\}$; $\dfrac{z'-b}{z'-a} = i\,\dfrac{z-b}{z-a}$.

b) Déduire l'ensemble des points M' lorsque M varie sur la médiatrice $[AB]$.

c) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle de diamètre $[AB]$?

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com